TECHNIQUES & MÉTHODES S07

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

■ ■ ■ Démarche générale

La méthode générale pour résoudre une équation différentielle linéaire est

1. Résolution de l'équation homogène,
2. Recherche d'une solution particulière,
3. Expression de la solution générale.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont classées suivant le type d'équation différentielle. Pour choisir la méthode appropriée, je réponds à ces deux questions :

- quel est l'ordre de l'équation ?
- les coefficients sont-ils constants ?

Le tableau ci-dessous donne une idée de la démarche à suivre dans chaque cas.

	Coefficient(s) constant(s)	**Coefficient(s) continus(s)**
EDL1	■ **Équation homogène** : $y' + ay = 0$. On forme et on résout l'équation caractéristique : $r + a = 0$. Les solutions … $h(t) = Ce^{rt}, C \in \mathbf{K}$ ■ **Solution particulière** : $y' + ay = b(t)$ On imite le type du 2^{d} membre : ▸ polynomial ▸ polynomial-exponentielle ▸ polynomial-trigo ■ **Solution générale** : $y' + ay = b(t)$ On ajoute solution générale de (H_1) et solution particulière !	■ **Équation homogène** : $y' + a(t)y = 0$. • On identifie $a(t) = \cdots$, • On trouve une primitive $A(t) = \cdots$ Les solutions … $h(t) = Ce^{-A(t)}, C \in \mathbf{K}$ ■ **Solution particulière** : $y' + a(t)y = b(t)$ On utilise la **MVC** (méthode de la variation de la constante). On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(t) = c(t)e^{-A(t)}$. $\left\Vert \begin{array}{lcl} y_0(t) & = & c(t)e^{-A(t)} \\ y_0'(t) & = & \cdots \end{array} \right.$ ■ **Solution générale** : $y' + a(t)y = b(t)$ On ajoute solution générale de (H_1) et solution particulière !
EDL2	■ **Sol H** : $y'' + ay' + by = 0$. On forme et on résout l'équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$. Les solutions sont les fonctions de la forme $h(t) = C_1h_1(t) + C_2h_2(t), (C_1, C_2) \in \mathbf{K}^2$, où (h_1, h_2) est un système fondamental de solutions. L'expression dépend du corps de base $\mathbf{K}$ et du discriminant de (EC). ■ **Sol P** : $y'' + ay' + by = c(t)$ On imite le type du 2^{d} membre : ▸ polynomial ▸ polynomial-exponentielle ▸ polynomial-trigo ■ **Solution générale** : $y'' + ay' + by = c(t)$ On ajoute solution générale de (H_2) et solution particulière !	La résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients continus dépasse légérement le cadre du programme de première année. On pourra appliquer les méthodes présentées page suivante (changement de fonction inconnue ou changement de variable) afin de se ramener au cadre strict du programme !

▪▪▪ Équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficient constant

On considère l'équation

$$y' + ay = b(t),\ \text{ où } b : I \to \mathbf{K} \text{ est continue}$$

$\boxed{1}$ la solution générale de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$ est Ce^{-at}.

$\boxed{2}$ une solution particulière dans le cas d'un second membre constant, polynomial, polynomial-exponentiel, polynomial-trigo est connue. J' utilise le **principe de superposition** pour m'y ramener.

▪▪▪ Équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficient continu

On considère l'équation

$$y' + a(t)y = b(t),\ \text{ où } a, b : I \to \mathbf{K} \text{ sont continues}$$

$\boxed{1}$ la solution générale de l'équation homogène associée $y' + a(t)y = 0$ est $Ce^{-A(t)}$, où $A : I \to \mathbf{K}$ est une primitive de a sur I.

$\boxed{2}$ une solution particulière est obtenue par la méthode de la variation de la constante. Je cherche y_0 sous la forme :

$$\begin{array}{r} a(t)\times \\ +1\times \end{array} \left\| \begin{array}{rcl} y_0(t) &=& c(t)e^{-A(t)} \\ y_0'(t) &=& \big[c'(t) - a(t)c(t)\big]e^{-A(t)} \\ y_0'(t) + a(t)y_0(t) &=& c'(t)e^{-A(t)} \end{array} \right.$$

y_0 sera solution pourvu que $c'(t) = b(t)e^{-A(t)}$.

▪▪▪ Équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants : solutions complexes

On considère l'équation

$$y'' + ay' + by = c(t),\ \text{ où } c : I \to \mathbf{C} \text{ est continue}$$

$\boxed{1}$ la solution générale sur **C** de $y'' + ay' + by = 0$ est obtenue en discutant suivant le discriminant Δ de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0.$ (EC)

- si $\Delta \neq 0$, la solution générale est $C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de (EC)
- si $\Delta = 0$, la solution générale est $(C_1 + C_2t)e^{r_0t}$ où r_0 est la racine double de (EC)

$\boxed{2}$ une solution particulière est connue dans le cas d'un second membre constant, polynomial, polynomial exponentiel. J'utilise le principe de superposition pour vous y ramener.

▪▪▪ Équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants : solutions réelles

On considère l'équation

$$y'' + ay' + by = c(t),\ \text{ où } c : I \to \mathbf{R} \text{ est continue}$$

$\boxed{1}$ la solution générale sur **R** de $y'' + ay' + by = 0$ est obtenue en discutant suivant le discriminant Δ de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0.$ (EC)

- si $\Delta > 0$, la solution générale est $C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de (EC)
- si $\Delta = 0$, la solution générale est $(C_1 + C_2t)e^{r_0t}$ où r_0 est la racine double de (EC)
- si $\Delta < 0$, la solution générale est $e^{\rho t}\big[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\big]$ où $\rho \pm i\omega$ sont les racines conjuguées de (EC)

$\boxed{2}$ une solution particulière est connue dans le cas d'un second membre constant, polynomial, polynomial exponentiel, polynomial trigo. J'utilise le principe de superposition pour m'y ramener.

▪▪▪ Équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients continus

On considère l'équation

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),\ \text{ où } a, b, c : I \to \mathbf{K} \text{ sont continues}$$

Ces équations ne sont pas au programme officiel : l'énoncé doit vous guider pour vous ramener aux cas précédents. Souvent l'énoncé propose

- un changement de fonction inconnue
- un changement de variable.